

論不定次(批)数条件下 单因素优选問題的最优策略

数学系 陈木法

本文考虑了不定次(批)数条件下的最优性概念, 并就某个基本的策略类, 对两种特殊情况建立了最优策略。全文共分两部分。前一部分完成于73年9月; 后一部分完成于75年6月。

第一部分 黄金分割法在不定次数条件下的最优性

§ 1. 引言

众所周知, 在預定 n 次试验的条件下, 分数法 F_n^* 是最优的。它可以达到最佳精度 $1/F_{n+1}$, 然而, 在实际应用中, 往往不能准确地預先确定试验的次数。为了适用于一般的情况, 需要否定“預定次数”这个限制条件。首先一种否定方法是建立“无穷远处”的最优策略^[2], 使得在实际试验中, 无需再考虑定次数的问题。可是, 严格地说来, 无穷远处的最优策略仍然是一种定次数的策略(只不过是定在无限次), 它并没有回答它自身与任何有限次试验的最优策略的接近程度。另一方面, 在有些情况下(例如每批偶数个试验点的情况), 这种否定方法失败了, 因为此时不存在无穷远处的最优策略。华罗庚同志早就指出了黄金分割法的最优性^[1]。作者结合几年来推优的实践和体会, 将各种可能的试验次数作为整体来考察, 提出了在“不定次数”条件下的精度估计概念, 并就某个基本的策略类证明了黄金分割法是在“不定次数”条件下的最优策略。

§ 2. 主要結果

关于单峰函数及试验策略的定义见[2]。本文约定试验的初始区间是 $[0, 1]$ 。

定义 1. 假定试验策略 P 作用于 $[0, 1]$ 上的单峰函数 f n 次试验后 n 个结果中的最大值点是 $C_n(P, f)$, 则

$$\delta_n(P) = \sup_f |C_f - C_n(P, f)| \quad (1)$$

* 文中的 F 、 W 、 P 、 Q 、 E 、 U 黑体字母应为花体字母, 因印刷条件限制暂用黑体——编者。

称为 P 的 n 次试验精度。其中, C_f 是 f 在 $[0, 1]$ 上的峰值点。

否定“预定次数”的条件, 就是要建立对于任何试验次数都能适用的最优策略。如果只要求“对任何试验次数都能适用”, 则是垂手可得的。例如以 0 与 1 之间的任何无理数为第一个试验点, 然后用对称规则安排新试验点, 这样的试验策略便合乎要求。因此, 还需要某种最优性概念。

显然, 对于任何试验策略 P , 不可能对于每一个试验次数 n , $\delta_n(P)$ 都一致地达到最佳精度 $\frac{1}{F_{n+1}}$; 然而, 自然要求它们的相对偏差

$$\frac{\delta_n(P) - \delta_n(F_n)}{\delta_n(F_n)} = F_{n+1}\delta_n(P) - 1$$

一致地尽可能地小。这就引导我们以

$$\delta^*(P) = \sup_n \{ F_{n+1}\delta_n(P) - 1 \} \quad (2)$$

作为试验策略 P 在不定次数条件下的精度估计。而这等价于

定义 2.

$$\delta(P) = \sup_n \{ F_{n+1}\delta_n(P) \} \quad (3)$$

称为试验策略 P 在不定次数条件下的精度。或称为 P 的精度。

记黄金割法为 W . 本文的目的在于证明

定理 1.

$$\delta(W) = 2\omega = \sqrt{5} - 1; \quad (4)$$

对于任何对称策略 Q ,

$$\delta(Q) \geq \delta(W). \quad (5)$$

定理 1 说明: 在不定次数条件下, 黄金分割法是对称策略类中的最优策略。为了证明定理 1, 我们先作一些准备工作。

§ 3. F -数列的基本性质

所谓 F -数列, 即是

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ……。

它有

递推关系: $F_{-1} = 0, F_0 = 1,$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 1) \quad (6)$$

$$\text{通项公式: } F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \quad (7)$$

$$\text{基本性质: } F_n F_m - F_{n+1} F_{m-1} = (-1)^m F_{n-m} \quad (n+1 \geq m \geq 0) \quad (8)$$

$$F_{n-1}F_{m-1} + F_nF_m = F_{n+m} \quad (n \geq 0, m \geq 0) \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \omega \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \dots < \frac{F_{2k-1}}{F_{2k}} < \dots < \omega < \dots < \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} < \dots < \frac{2}{3} < 1 \quad (11)$$

这些性质的证明都很简单, 故从略。从(8)立即得出

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n-1} \quad (12)$$

$$F_nF_{n-1} - F_{n-2}F_{n+1} = (-1)^{n-1} \quad (13)$$

利用以上基本性质, 可以证明

引理 1. 设 $k \geq 1$, 则

$$\frac{F_{2k+2}}{F_{2k}} > 4\omega, \quad (14)$$

$$\frac{3F_{2k+1}}{F_{2k} + F_{2k+2}} > 2\omega, \quad (15)$$

$$\frac{F_{2k+1}F_{2k+3}}{F_{2k}F_{2k+3} + F_{2k-1}F_{2k+1}} > 2\omega, \quad (16)$$

证, 由(9)得

$$F_{2k+3} = F_3F_{2k-2} + F_4F_{2k-1} = 3F_{2k-2} + 5F_{2k-1},$$

$$F_{2k+1} = F_1F_{2k-2} + F_2F_{2k-1} = F_{2k-2} + 2F_{2k-1},$$

从而

$$\frac{F_{2k+1}F_{2k+3}}{F_{2k}F_{2k+3} + F_{2k-1}F_{2k+1}} = \frac{3F_{2k-2}^2 + 11F_{2k-2}F_{2k-1} + 10F_{2k-1}^2}{3F_{2k-2}^2 + 9F_{2k-2}F_{2k-1} + 7F_{2k-1}^2} \geq \frac{24}{19} > 2\omega$$

(16)式得证, 余者类似可证。

引理 2. 当 $k \geq 1$, $c \leq 2\omega$ 时*,

$$\frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \frac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}} > \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} - \frac{C}{F_{2k+1}F_{2k+2}} \quad (17)$$

$$\frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \frac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}} > \frac{F_{2k+1} + F_{2k-1}}{F_{2k+2} + F_{2k}} \quad (18)$$

$$\frac{F_{2k+3}}{F_{2k-1}} - \frac{CF_{2k}F_{2k+3}}{F_{2k-1}F_{2k+1}} > C \quad (19)$$

* 事实上, 利用 $\frac{F_{2k+2}}{F_{2k+2} + F_{2k}} \geq \frac{2}{3} > \omega$ 容易证明(17)之右端大于(18)之右端。

但我们并不需要这一不等式。

这三个不等式可分别从引理 1 中的三个不等式推出。例如, 设(17)不真, 则

$$\frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} \leq \frac{C}{F_{2k+1}} \left(\frac{1}{F_{2k-1}} - \frac{1}{F_{2k+2}} \right)$$

即
$$\frac{F_{2k-2}F_{2k+1} - F_{2k-1}F_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \leq \frac{C}{F_{2k+1}} \cdot \frac{2F_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+2}}$$

由(8),

$$(-1)^{2k} F_{2k-(2k-1)} \leq \frac{2CF_{2k}}{F_{2k+2}}$$

从而

$$\frac{F_{2k+2}}{F_{2k}} \leq 2C \leq 4\omega$$

这与(14)相悖, 故(17)成立。

§ 4. 对称策略类及其精度计算

对任一试验策略 P , 由规则 P 在 $[0, 1]$ 上确定第一个试验点 $x_1 = x_1(P)$; 然后根据 x_1 的位置及 $f(x_1)$ 之值由规则 P 确定第二个试验点 $x_2 = P(x_1, f(x_1))$ 无妨设 $x_1 > x_2$ (相反的情形可以类似地讨论)。此时, 若 $f(x_2) \geq f(x_1)$, 则可去掉 $[x_1, 1]$, 而在留下区间 $[0, (x_2), x_1]$ ((x_2) 表示两次试验后的“最大值”点) 安排第三次试验。反之, 可去掉 $[0, x_2]$, 而在 $[0, (x_2), x_1]$ 上安排第三次试验。我们称 $[0, (x_1), x_1]$ 和 $[x_2, (x_1), 1]$ 为两次试验后的留下区间。类似地有 n 次试验后的留下区间。

我们知道, 从构造规则来看, 黄金分割法和分数法的区别仅仅在于第一个试验点。因为从第二点开始, 都是按照对称规则来安排新试点的。这类策略叫做对称策略或基本策略。

考虑到在应用中, 复杂的策略没有多大价值, 为使研究得以简化, 以后我们经常只限于对称策略 Q 。今后, Q 总表示对称策略, 它的第一个试验点 $x_1(Q)$ 和 n 次试验精度 $\delta_n(Q)$ 常简记为 x_1 和 δ_n 。

引理 3. 对于 Q , 它作用于任何 f , n 次试验后的留下区间 $[a_n, (c_n), b_n]$ 具有一致的结构:

$$\delta_{n-1} = b_n - a_n, \quad \delta_n = \max \{ c_n - a_n, b_n - c_n \} \quad (20)$$

这个引理比较直观, 不再细证。它告诉我们: 对于对称策略, n 次试验后留下区间的构造一致。即留下区间的全长等于 δ_{n-1} ; 而被“好点”分成的两段中, 长段的长度等于 δ_n 。同时还告诉我们, 为了求得 δ_{n+1} , 只须在任一 n 次试验留下区间上安排第 $n+1$ 次试验, 然后考虑第 $n+1$ 次试验后任一留下区间的结构便已足够。这为我们计算精度提供了很大方便。

引理 4. 对任一对称策略 Q , 若

$$\frac{F'_{2k-1}}{F'_{2k}} < x_1 < \frac{F'_{2k+1}}{F'_{2k+2}} \quad (k \geq 1) \quad (21)$$

$$\text{则} \quad \delta_h = (-1)^{h-1} F'_{h-1} x_1 + (-1)^{h-2} F'_{h-2}, \quad 1 \leq h \leq 2k \quad (22)$$

$$\delta_{2k+1} = F'_{2k} - F'_{2k+1} x_1 \quad (23)$$

证, 对 $1 \leq h \leq 2k$ 用数学归纳法证之。

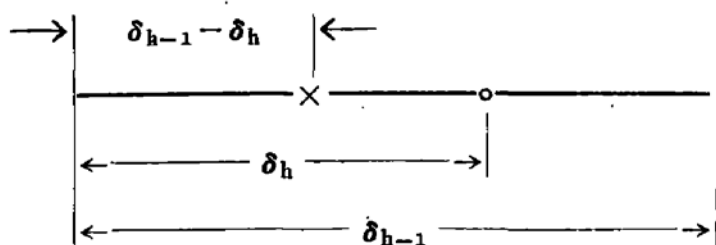
当 $h=1, 2$ 时, 因为 $\frac{1}{2} \leq \frac{F'_{2k-1}}{F'_{2k}} < x_1 < \frac{F'_{2k+1}}{F'_{2k+2}} \leq \frac{2}{3}$, 所以 $\delta_1 = x_1$, $\delta_2 = 1 - x_1$ 。

(22) 式显然成立。

设对于 h ($2 \leq h \leq 2k-1$) 的情况已真。

$$\begin{aligned} \text{则有} \quad \delta_{h-1} &= (-1)^{h-2} F'_{h-2} x_1 + (-1)^{h-3} F'_{h-3}, \\ \delta_h &= (-1)^{h-1} F'_{h-1} x_1 + (-1)^{h-2} F'_{h-2} \end{aligned} \quad (24)$$

为求得 δ_{h+1} , 由引理 3, 只须考虑任一 h 次试验后的留下区间。它具有如下构造



其中“ $\times$ ”是“ $\circ$ ”的对称点, 即第 $h+1$ 次试验点。我们证明

$$\begin{aligned} \delta_{h-1} - \delta_h &> \delta_h - (\delta_{h-1} - \delta_h) \\ \text{即} \quad 2\delta_{h-1} &> 3\delta_h \end{aligned} \quad (25)$$

因为 $h \leq 2k-1$, 所以由(11)知

$$\begin{cases} x_1 > \frac{F'_{2k-1}}{F'_{2k}} > \frac{F'_{h+1}}{F'_{h+2}}, & \text{当 } h \text{ 为偶数;} \\ x_1 < \frac{F'_{2k+1}}{F'_{2k+2}} < \frac{F'_{h+1}}{F'_{h+2}}, & \text{当 } h \text{ 为奇数。} \end{cases}$$

从而对任何 h , 有

$$(-1)^h x_1 > (-1)^h \frac{F'_{h+1}}{F'_{h+2}}$$

由(9),

$$F'_{h+2} = F'_3 F'_{h-1} + F'_2 F'_{h-2},$$

$$F'_{h+1} = F'_3 F'_{h-2} + F'_2 F'_{h-3},$$

$$\text{故 } 2[(-1)^{h-2} F'_{h-2} x_1 + (-1)^{h-3} F'_{h-3}] > 3[(-1)^{h-1} F'_{h-1} x_1 + (-1)^{h-2} F'_{h-2}],$$

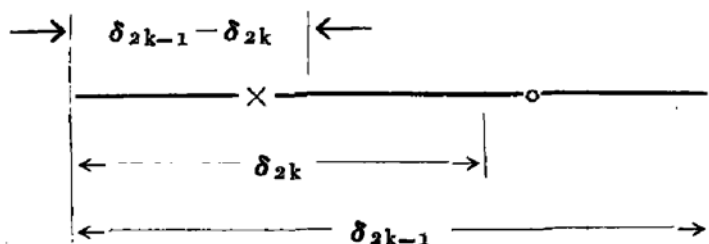
由(24)即得(25)。

这样, 由引理 3 和 (24) 得

$$\begin{aligned}\delta_{h+1} &= \delta_{h-1} - \delta_h \\ &= (-1)^{h-2} F_{h-2} x_1 + (-1)^{h-3} F_{h-3} - (-1)^{h-1} F_{h-1} x_1 - \\ &\quad - (-1)^{h-2} F_{h-2} \\ &= (-1)^h F_h x_1 + (-1)^{h-1} F_{h-1}\end{aligned}$$

至此, (22) 式得证。今往证明 (23)。

与上面一样, 有



先证

$$\delta_{2k} - (\delta_{2k-1} - \delta_{2k}) > \delta_{2k-1} - \delta_{2k}$$

倘若不然, 则

$$3\delta_{2k} \leq 2\delta_{2k-1}$$

从而由 (22),

$$3F_{2k-2} - 3F_{2k-1}x_1 \leq 2F_{2k-2}x_1 - 2F_{2k-3},$$

即

$$x_1 \geq \frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}$$

这与 (21) 相矛盾。于是, 由引理 3 和 (22) 知

$$\begin{aligned}\delta_{2k+1} &= \delta_{2k} - (\delta_{2k-1} - \delta_{2k}) \\ &= 2\delta_{2k} - \delta_{2k-1} \\ &= 2F_{2k-2} - 2F_{2k-1}x_1 - F_{2k-2}x_1 + F_{2k-3} \\ &= F_{2k} - F_{2k+1}x_1\end{aligned}$$

引理 4 证毕。

类似地, 我们有

引理 5. 分数法 F_m 的 n ($1 \leq n \leq m$) 次试验精度是

$$\delta_n(F_m) = \frac{F_{m-n+1}}{F_{m+1}} \quad (26)$$

而黄金分割法 W 的 n 次试验精度是

$$\delta_n(W) = \omega^n \quad (n \geq 0) \quad (27)$$

下面的引理对于定理 1 的证明具有基本的意义。

引理 6. 设 $C \leq 2\omega$, 对于对称策略 Q , 我们有:

$$\text{若 } \frac{F_{2k-1}}{F_{2k}} < x_1 < \frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}, \quad (k \geq 1) \quad (28)$$

则

$$\max \{ F_{2k+1}\delta_{2k}, F_{2k+2}\delta_{2k+1}, F_{2k+3}\delta_{2k+2} \} > C \quad (29)$$

证, 由引理 4

$$\delta_{2k} = F_{2k-2} - F_{2k-1}x_1,$$

$$\delta_{2k+1} = F_{2k} - F_{2k+1}x_1.$$

若 $F_{2k+1}\delta_{2k} > C$ 或 $F_{2k+2}\delta_{2k+1} > C$, 则 (29) 已真。否则, 我们证明必有

$$F_{2k+3}\delta_{2k+2} > C.$$

因若

$$\begin{cases} F_{2k+1}\delta_{2k} \leq C, \\ F_{2k+2}\delta_{2k+1} \leq C, \end{cases}$$

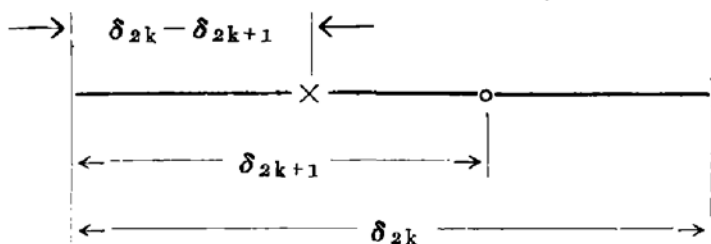
则

$$\begin{cases} x_1 \geq \frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \frac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \\ x_1 \geq \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} - \frac{C}{F_{2k+1}F_{2k+3}} \end{cases}$$

由 (17) 知, 这个不等式组的解是:

$$x_1 \geq \frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \frac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \quad (30)$$

此时, 为计算 δ_{2k+2} , 考虑



首先有

$$\delta_{2k} - \delta_{2k+1} > \delta_{2k+1} - (\delta_{2k} - \delta_{2k+1})$$

否则, 若 $3\delta_{2k+1} \geq 2\delta_{2k}$, 则 $x_1 \leq \frac{F_{2k+1} + F_{2k-1}}{F_{2k+2} + F_{2k}}$

但由 (18) 和 (30),

$$x_1 \leq \frac{F_{2k+1} + F_{2k-1}}{F_{2k+2} + F_{2k}} < \frac{F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \frac{C}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \leq x_1,$$

是为矛盾。于是由引理 3 和引理 4,

$$\begin{aligned}\delta_{2k+2} &= \delta_{2k} - \delta_{2k+1} \\ &= F_{2k}x_1 - F_{2k-1}\end{aligned}$$

由(30),

$$\begin{aligned}\delta_{2k+2} &\geq \frac{F_{2k}F_{2k-2}}{F_{2k-1}} - \frac{CF_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+1}} - F_{2k-1} \\ &= \frac{F_{2k} \cdot F_{2k-2} - F_{2k-1}^2}{F_{2k-1}} - \frac{CF_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \\ &= \frac{1}{F_{2k-1}} - \frac{CF_{2k}}{F_{2k-1}F_{2k+1}}\end{aligned}$$

考虑到(19), 便知

$$F_{2k+3}\delta_{2k+2} \geq \frac{F_{2k+3}}{F_{2k-1}} - \frac{CF_{2k}F_{2k+3}}{F_{2k-1}F_{2k+1}} > C$$

引理 6 得证。

§5. 定理 1 的証明

由引理 5, 对任意的 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{F_{2n}\delta_{2n-1}(W)}{F_{2n+1}\delta_{2n}(W)} &= \frac{F_{2n}\omega^{2n-1}}{F_{2n+1}\omega^{2n}} = \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}\omega} > 1; \\ \frac{F_{2n}\delta_{2n-1}(W)}{F_{2n+2}\delta_{2n+1}(W)} &= \frac{F_{2n}\omega^{2n-1}}{F_{2n+2}\omega^{2n+1}} = \frac{F_{2n}}{F_{2n+2}\omega^2} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\omega^{2n+1}} - (-\omega)^{2n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\omega^{2n+3}} - (-\omega)^{2n+3}\right]\omega^2} = \frac{\frac{1}{\omega^{2n+1}} + \omega^{2n+1}}{\frac{1}{\omega^{2n+1}} + \omega^{2n+5}} \\ &= \frac{1 + \omega^{4n+2}}{1 + \omega^{4n+6}} > 1\end{aligned}$$

由此可见

$$\delta(W) = \sup_n \{ F_{n+1}\delta_n(W) \} = F_2\delta_1(W) = 2\omega$$

(4)式得证。

对任一对称策略 Q , 如果 $x_1(Q) \geq \omega$, 则

$$\delta(Q) = \sup_n \{ F_{n+1}\delta_n(Q) \} \geq F_2\delta_1(Q) \geq 2\omega$$

(5)式成立。今设 $x_1(Q) < \omega$, 因为试验次数 n 任意, $x_1(Q) \neq \frac{F_n}{F_{n+1}}$, 由对称性, 不妨设 $x_1(Q) > \frac{1}{2}$, 由于 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}} \uparrow \omega,$$

故必存在一个 k , 使得

$$\frac{F_{2k-1}}{F_{2k}} < x_1(Q) < \frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}$$

于是由引理 6,

$$\begin{aligned} \delta(Q) &= \sup_n \{ F_{n+1} \delta_n(Q) \} \\ &\geq \max_{2k \leq n \leq 2k+1} \{ F_{n+1} \delta_n(Q) \} > C \geq 2\omega = \delta(W) \end{aligned}$$

定理证毕

2

§ 6. 試驗次数不超过 m 的最优策略

如果我们排除試驗次数超过 m (给定的正整数) 的可能性, 那么, 需要建立試驗次数不超过 m (即可能是 1, 2, ..., m 次, 但具体次数不能预先确定) 的最优策略。相应的精度估计是:

定义 3. 对任一試驗策略 P ,

$$\delta^{(m)}(P) = \max_{1 \leq n \leq m} \{ F_{n+1} \delta_n(P) \} \quad (31)$$

称为 P 在不超过 m 次試驗的精度。

在上面所证明的引理中, 将 C 换作 $2F_{2l+1}/F_{2l+2}$, 相应的结果均成立, 从而不难证明下列的

定理 2, 在基本策略类中, 試驗次数不超过 m 的最优策略是 $F^{(m)}$ 。

$$x_1(F^{(1)}) = \frac{1}{2} \quad (32)$$

$$x_1(F^{(2l)}) = x_1(F^{(2l+1)}) = \frac{F_{2l+1}}{F_{2l+2}} \quad (l \geq 1) \quad (33)$$

$$\delta^{(1)}(F^{(1)}) = 1 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \delta^{(2l)}(F^{(2l)}) &= \delta^{(2l)}(F^{(2l+1)}) \\ &= \delta^{(2l+1)}(F^{(2l+1)}) \\ &= 2F_{2l+1}/F_{2l+2} \end{aligned} \quad (35)$$

§ 7. 結 束 語

黄金分割法否定了“預定試驗次数”的限制条件, 在新的基础上达到了最优。它比分數法前进了一步, 更具有普遍性。这就说明为什么在推广普及中, 应当把它放在比较突出的位置。

第二部分：U 在不定批数条件下的最优性

§1. 引言

先将第一部分中的概念推广到每批多个试点的情况。

仍假定试验的初始区间是 $[0, 1]$ 。 f 恒指 $[0, 1]$ 上的单峰函数。假如一个试验策略 P 作用于 f , n 批—— $(K_1, K_2, \dots, K_n)$ 试验之后, 最大值点是 $C_n(P, f)$ 。而 f 在 $[0, 1]$ 上的峰值点是 C_f 。

定义 1.

$$\delta_n(P) = \sup_f |C_f - C_n(P, f)| \quad (1)$$

称为 P 的 n 步精度。

定义 2. 如果对于任一试验策略 Q ,

$$\delta_n(P) \leq \delta_n(Q) \quad (2)$$

则称 P 是在限定 n 批条件下的最优策略。

对于每批 $2i$ ($i \geq 1$) 个试验点的情况, 早已建立了在 (2) 意义下预定 n 批试验的最优策略 $E_n^{(i)}$, 它的精度是

$$\delta_n(E_n^{(i)}) = (E_n^{(i)})^{-1} = (2(i+1)^n - 1)^{-1} \quad (3)$$

应当指出, 对于不同的 i 和 n , $E_n^{(i)}$ 是不同的策略。但若不致发生混淆, 我们将一律记作 E 。

在实际应用中, 往往不能准确地“预定试验批数”。因此, 应当否定这个限制条件。那么, 能不能通过令 $n \rightarrow \infty$, 从 $E_n^{(i)}$ 来求得无穷远处的最优策略呢? 请看:

$E_n^{(i)}$ 的头两个试点是 $\frac{2(i+1)^{n-1}-1}{2(i+1)^n-1}$ 和 $\frac{2(i+1)^{n-1}}{2(i+1)^n-1}$ 。

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 这两点都趋于 $\frac{1}{i+1}$ 。这样, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $E_n^{(i)}$ 的第一批 $2i$ 个试点

两重合, 变成只有 i 个试点。因此, 这个方法完全失败了。在这一部分里, 我们继续前一部分的想法, 考察在更一般意义下 (即在不定批数条件下) 的最优策略, 得到了满意的结果。

以下所说的试验策略, 均指每批 $2i$ 个试点的策略。

定义 3.

$$\delta^{(m)}(P) = \max_{1 \leq n \leq m} \delta_n^{(i)}(P) \quad (4)$$

称为策略 P 在不超过 m 批试验条件下的精度。

定义 4. 如果对于任何的试验策略 Q ,

$$\delta^{(m)}(P) \leq \delta^{(m)}(Q) \quad (5)$$

则称 P 是在不超过 m 批条件下的最优策略。

定义 5.

$$\delta(P) = \sup_n \{E_n^{(i)} \delta_n(P)\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \delta^{(m)}(P) \quad (6)$$

称为 P 在不限批数条件下的精度, 简称为 P 的精度。

定义 6. 如果对于任何的试验策略 Q ,

$$\delta(P) \leq \delta(Q) \quad (7)$$

则称 Q 是在不限批数条件下的最优策略。

我们已经知道, 所有的(预定批数或无穷远处的)最优策略都有统一的构造规则^[2]: 在第 n 批试验时, 把试验点分配得使上批试验后的留下区间(也称剩余区间)恰好被分成 α 、 β 相间的诸段。即

$$\overbrace{\alpha \mid \beta \mid \alpha \mid \beta \mid \cdots}^{\alpha \geq \beta},$$

或

$$\overbrace{\alpha \mid \beta \mid \alpha \mid \beta \mid \cdots}^{\alpha < \beta},$$

其中有一点是上次试验后留下的好点。我们把按照上述规则构造出来的策略称为基本策略。因为在应用中, 构造复杂的策略没有多大意义, 故我们只研究基本策略。我们的目的, 是从基本策略类中找出(7)意义下的最优策略。

定义 7. U 是这样—个每批 $2i$ ($i \geq 1$) 个试点的试验策略: 它在第一批试验时, $2i$ 个试点将 $[0, 1]$ 分成 $2i+1$ 等分; 而在第 n (≥ 2) 批试验时, 它的 $2i$ 个试点连同上批试验后留下的好点将剩余区间分成 $2i+2$ 等分。

U 早已在实践中得到广泛应用。但作者至今未见过关于它的最优性意义的任何讨论。本文指出它的最优性的意义, 并就基本策略类证明了它的最优性。

§2. 若干引理

引理 1. 我们有

$$E_n \triangleq E_n^{(i)} = 2(i+1)^n - 1. \quad (8)$$

$$\delta_n(U) = E_n^{-1} \quad (9)$$

$$\delta_n(U) = 1/(2i+1)(i+1)^{n-1} \quad (10)$$

$$\delta^{(m)}(U) = \max_{1 \leq n \leq m} E_n \delta_n(U) = E_m \delta_m(U) \quad (11)$$

$$= [2(i+1)^m - 1]/(2i+1)(i+1)^{m-1} \quad (12)$$

$$\delta(\mathbf{U}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \delta^{(m)}(\mathbf{U}) = 2(i+1)/(2i+1). \quad (13)$$

为证 (11), 只须证明

$$E_n \delta_n(\mathbf{U}) < E_{n+1} \delta_{n+1}(\mathbf{U}). \quad (14)$$

事实上, 若 (14) 不真, 则

$$\frac{2(i+1)^n - 1}{2(i+1)^{n+1} - 1} = \frac{E_n}{E_{n+1}} \geq \frac{\delta_{n+1}(\mathbf{U})}{\delta_n(\mathbf{U})} = \frac{(2i+1)(i+1)^{n-1}}{(2i+1)(i+1)^n},$$

即 $2(i+1)^{n+1} - (i+1) \geq 2(i+1)^{n+1} - 1,$

这是不可能的。(14) 得证, 从而 (11) 成立。其余各式显然成立。

今设 $\mathbf{P}$ 是每批 $2i$ 个试点的任一试验策略。不失一般性, 可设它的第一批试点是:

$$\{\alpha_1, \alpha_1 + \beta_1, 2\alpha_1 + \beta_1, 2\alpha_1 + 2\beta_1, \dots, i\alpha_1 + i\beta_1\}; \quad (15)$$

第 n (≥ 2) 批试点是:

$$\{\alpha_n, \alpha_n + \beta_n, 2\alpha_n + \beta_n, 2\alpha_n + 2\beta_n, \dots, (i+1)\alpha_n + i\beta_n\}. \quad (16)$$

其中有一试点是前 $n-1$ 批的试点, 即已试点。于是有

引理 2.

$$\delta_n(\mathbf{P}) = \max(\alpha_n, \beta_n). \quad (17)$$

$$\alpha_n + \beta_n = (1 - \alpha_1)/i(i+1)^{n-1}. \quad (18)$$

引理 3. 如果

$$\alpha_1 \in \left\{ \alpha_2, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \left[\frac{i}{2} \right] (\alpha_2 + \beta_2) \right\}. \quad (19)$$

那么

$$\delta^{(2)}(\mathbf{P}) > \delta(\mathbf{U}). \quad (20)$$

证、假设 (20) 不真。由 (19),

$$\alpha_1 \leq \left[\frac{i}{2} \right] (\alpha_2 + \beta_2) = \left[\frac{i}{2} \right] \frac{1 - \alpha_1}{i(i+1)} \quad (\text{由 (18)}).$$

从而

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leq \left[\frac{i}{2} \right] / \left(i(i+1) + \left[\frac{i}{2} \right] \right) \\ &\leq 1 / \left(1 + \frac{i(i+1)}{\frac{i}{2}} \right) \\ &< \frac{1}{2(i+1)} < \frac{1}{2(i+1)} + \frac{1}{2(i+1)(2i+1)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

但由 (17)、(18) 和假设,

$$\begin{aligned}\frac{1-\alpha_1}{i} - \alpha_1 = \beta_1 &\leq \max\{\alpha_1, \beta_1\} = \delta_1(\mathbf{P}) \leq E_1^{-1}\delta^{(2)}(\mathbf{P}) \leq \\ &\leq E_1^{-1}\delta(\mathbf{U}) = \frac{2(i+1)}{(2i+1)^2},\end{aligned}$$

从而

$$\alpha_1 \geq \frac{1}{2(i+1)} + \frac{1}{2(i+1)(2i+1)^2}. \quad (22)$$

由(21)和(22)引出矛盾, 因而引理3得证。

引理4. 如果

$$\alpha_1 = \left[\frac{i}{2} \right] (\alpha_2 + \beta_2) + \left(\left[\frac{i+1}{2} \right] - \left[\frac{i}{2} \right] \right) \alpha_2 \quad (23)$$

那么(20)也成立。

证、当 $i=2j$ 时, 由引理3可推出引理4, 故只需就 $i=2j-1$ 的情形证明引理4成立, 此时

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (j-1)(\alpha_2 + \beta_2) + \alpha_2 \\ &= (j-1)(1-\alpha_1)/2j(2j-1) + \alpha_2 \\ \text{即 } \alpha_2 &= \alpha_1(j-1)(1-\alpha_2)/2j(2j-1) \\ &= ((4j^2-j-1)\alpha_1 - (j-1))/2j(2j-1).\end{aligned} \quad (24)$$

如若(20)不真, 那么

$$\begin{aligned}\alpha_2 &\leq \max(\alpha_2, \beta_2) = \delta_2(\mathbf{P}) \leq E_2^{-1}\delta^{(2)}(\mathbf{P}) \leq E_2^{-1}\delta(\mathbf{U}) = \\ &= 4j/(4j-1)(8j^2-1).\end{aligned} \quad (25)$$

由(24)和(25)得

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\leq \frac{j-1}{4j^2-j-1} + \frac{8j^2(2j-1)}{(4j-1)(4j^2-j-1)(8j^2-1)} = \\ &= \frac{2j-1}{2(4j^2-j-1)} - \frac{8j^2-4j+1}{(4j-1)(4j^2-j-1)(8j^2-1)} < \frac{2j-1}{2(4j^2-j-1)} < \\ &< \frac{1}{4j} + \frac{1}{4j(4j-1)^2}\end{aligned} \quad (26)$$

并且, 若(20)不真, (22)也应成立, 即

$$\alpha_1 \geq \frac{1}{4j} + \frac{1}{4j(4j-1)^2} \quad (27)$$

(26)与(27)相悖, 证明遂告完成。

引理5. 如果

$$\alpha_1 \in \left\{ \left[\frac{i+3}{2} \right] (\alpha_2 + \beta_2), \dots, i\alpha_2 + i\beta_2, (i+1)\alpha_2 + i\beta_2 \right\} \quad (28)$$

那么 (20) 成立。

证、倘若不然, 由 (28), 当 $i \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geq \left[\frac{i+3}{2} \right] / \left(i(i+1) + \left[\frac{i+3}{2} \right] \right) \\ &= 1 / \left(1 + \frac{i(i+1)}{\left[\frac{i+3}{2} \right]} \right) \geq 1 / \left(1 + \frac{i(i+1)}{\frac{i+2}{2}} \right) = \frac{i+2}{2i^2+3i+2} > \\ &> \frac{1}{2i+1} + \frac{1}{(2i+1)^2} = E_1^{-1}\delta(\mathbf{U}) \geq E_1^{-1}\delta^{(2)}(\mathbf{P}) \geq \delta_1(\mathbf{P}) = \\ &= \max(\alpha_1, \beta_1) \geq \alpha_1. \end{aligned}$$

是为矛盾。当 $i = 1$ 时, $\alpha_1 \geq \left[\frac{1+3}{2} \right] / \left(1 \times (1+1) + \left[\frac{1+3}{2} \right] \right) > \frac{4}{9} = E_1^{-1}\delta(\mathbf{U}) \geq \alpha_1$, 同样导致矛盾。

引理 6. 如果 $i \geq 2$,

$$\alpha_1 = \left[\frac{i+3}{2} \right] \alpha_2 + \left[\frac{i+2}{2} \right] \beta_2 \quad (29)$$

则 (20) 成立。

当 $i = 2j$ 时, 由引理 5 可推出引理 6。故只有 $i = 2j-1$ 的情形待证。由 (29)

$$\alpha_1 = (j+1)\alpha_2 + j\beta_2 = (j+1)(\alpha_2 + \beta_2) - \beta_2 = \frac{(j+1)(1-\alpha_1)}{2j(2j-1)} - \beta_2$$

即

$$\beta_2 = \frac{(j+1) - (4j^2 - j + 1)\alpha_1}{2j(2j-1)}. \quad (30)$$

如若 (20) 不真, 则

$$\begin{aligned} \beta_2 &\leq \max(\alpha_2, \beta_2) \leq E_2^{-1}\delta^{(2)}(\mathbf{P}) \leq E_2^{-1}\delta(\mathbf{U}) = \\ &= 4j / (4j-1)(8j^2-1). \end{aligned} \quad (31)$$

从而

$$\frac{(j+1) - (4j^2 - j + 1)\alpha_1}{2j(2j-1)} \leq \frac{4j}{(4j-1)(8j^2-1)},$$

即

$$\alpha_1 \geq \frac{32j^4 + 8j^3 - 4j^2 - 3j + 1}{(4j-1)(8j^2-1)(4j^2-j+1)} = \frac{1}{4j-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(8j^3 - 4j^2 - 2j + 1)}{(4j-1)(4j^2 - j + 1)(8j^2 - 1)} > \frac{1}{4j-1} + \\
& + \frac{2j+1}{2(4j-1)(4j^2 - j + 1)} > \frac{1}{4j-1} + \frac{1}{(4j-1)^2}.
\end{aligned} \quad (32)$$

但与引理 5 一样, 应有

$$\alpha_1 \leq \max(\alpha_1, \beta_1) \leq E_1^{-1} \delta(\mathbf{U}) = \frac{1}{4j-1} + \frac{1}{(4j-1)^2}.$$

可见引理 6 必定成立。

引理 7. 当 $n \geq 2$ 时, 如果

$$\alpha_k = \beta_k = 1/(2i+1)(i+1)^{k-1}, \quad (1 \leq k \leq n-1), \quad (33)$$

并且

$$\delta^{(n+1)}(\mathbf{P}) \leq \delta(\mathbf{U}), \quad (34)$$

则

$$\alpha_n \notin \{ \alpha_{n+1}, \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}, \dots, \left[\frac{i}{2} \right] (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) \}. \quad (35)$$

证、若 (35) 不成立, 则

$$\begin{aligned}
\alpha_n & \leq \left[\frac{i}{2} \right] (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) = \left[\frac{i}{2} \right] \frac{1 - \alpha_1}{i(i+1)^n} = \left[\frac{i}{2} \right] \frac{1 - 1/(2i+1)}{i(i+1)^n} = \\
& = 2 \left[\frac{i}{2} \right] / (2i+1)(i+1)^n \leq 2 \times \frac{i}{2} / (2i+1)(i+1)^n < \\
& < 1 / (2i+1)(i+1)^{n-1} - 1 / (2i+1)(i+1)^{n-1} (2(i+1)^n - 1). \quad (36)
\end{aligned}$$

另一方面, 由 (34) 知

$$\begin{aligned}
2 / (2i+1)(i+1)^{n-1} - \alpha_n = \beta_n & \leq \max\{\alpha_n, \beta_n\} = \delta_n(\mathbf{P}) \leq E_n^{-1} \delta^{(n)}(\mathbf{P}) \leq \\
& \leq E_n^{-1} \delta^{(n+1)}(\mathbf{P}) < E_n^{-1} \delta(\mathbf{U}) = 2(i+1) / (2i+1)(2(i+1)^n - 1). \quad (37)
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\alpha_n & \geq 2 / (2i+1)(i+1)^{n-1} - 2(i+1) / (2i+1)(2(i+1)^n - 1) \\
& = 1 / (2i+1)(i+1)^{n-1} - 1 / (2i+1)(i+1)^{n-1} (2(i+1)^n - 1). \quad (38)
\end{aligned}$$

(38) 矛盾于 (36), 故引理成立。

引理 8. 在引理 7 的条件下,

$$\alpha_n \neq \left[\frac{i+1}{2} \right] \alpha_{n+1} + \left[\frac{i}{2} \right] \beta_{n+1}. \quad (39)$$

情

证、当 $i=2j$ 时, (35) 推出 (39)。因此, 只待 $i=2j-1$ 的情形需要验证。此时, 如若 (39) 不真, 那么

$$\alpha_n = j\alpha_{n+1} + (j-1)\beta_{n+1}.$$

这样, 由 (34)

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \alpha_n - (j-1)(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) = \alpha_n - 2(j-1)/(4j-1)(2j)^n \leq \\ &\leq \max\{\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\} \leq E_{n+1}^{-1} \delta(\mathbf{U}) = 4j/(4j-1)(2(2j)^{n+1}-1). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \alpha_n &\leq 4j/(4j-1)(2(2j)^{n+1}-1) + 2(j-1)/(4j-1)(2j)^n \\ &< 1/(4j-1)(2j)^{n-1} - 1/(4j-1)(2j)^{n-1}(2(2j)^n-1). \end{aligned} \quad (40)$$

但 (40) 与 (38) 矛盾, 故引理 8 得证。

引理 9. 在引理 7 的条件下,

$$\begin{aligned} \alpha_n \notin \left\{ \left[\frac{i+3}{2} \right] (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}), \dots, i\alpha_{n+1} + i\beta_{n+1}, \right. \\ \left. (i+1)\alpha_{n+1} + i\beta_{n+1} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

证、如果 (41) 不真, 则可推出

$$\beta_n \leq \left[\frac{i}{2} \right] (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}). \quad (42)$$

在引理 7 的证明中, 将 α_n 换作 β_n , 立知本引理成立。

引理 10. 在引理 7 的条件下

$$\alpha_n \neq \left[\frac{i+3}{2} \right] \alpha_{n+1} + \left[\frac{i+2}{2} \right] \beta_{n+1}. \quad (43)$$

证、只须对 $i=2j-1$ 证明 (43) 式。反之, 若

$$\alpha_n = (j+1)\alpha_{n+1} + j\beta_{n+1},$$

那么

$$\beta_n = (j-1)\alpha_{n+1} + j\beta_{n+1}.$$

于是, 可以得到 α_n 换作 β_n 的 (40) 式。另一方面, 将 (37) 中的 α_n 与 β_n 互换, 又可得 α_n 换作 β_n 的 (38) 式。这两个矛盾不等式说明本引理成立。

§ 3. 最优性证明

定理 1. 一切每批 $2i$ ($i \geq 2$) 个试点的基本策略中, $\mathbf{U}$ 是最优的。

证。只需证明, 对任何的每批 $2i$ ($i \geq 2$) 个试点的基本策略 $\mathbf{P}$, 若 $\mathbf{P}$ 不同于 $\mathbf{U}$, 则

$$\delta(\mathbf{P}) > \delta(\mathbf{U}). \quad (44)$$

假定最先使 $\mathbf{P}$ 不同于 $\mathbf{U}$ 的批数为 n 。如果 $n=1$, 由于 $\mathbf{P}$ 不同于 $\mathbf{U}$, 则必有

$$\alpha_1 \neq \left[\frac{i+2}{2} \right] \alpha_2 + \left[\frac{i+1}{2} \right] \beta_2,$$

即

$\setminus$

$$\alpha_1 \in \{ \alpha_2, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \left[\frac{i+1}{2} \right] \alpha_2 + \left[\frac{i}{2} \right] \beta_2 \} \cup$$

$\setminus$

$$\cup \left\{ \left[\frac{i+3}{2} \right] \alpha_2 + \left[\frac{i+2}{2} \right] \beta_2, \dots, (i+1) \alpha_2 + i \beta_2 \right\}.$$

但由引理 3 ~ 引理 6, 此时将有

$$\delta(P) \geq \delta^{(2)}(P) > \delta(U).$$

因而 (44) 已真。

如果 $n > 1$, 那么依照对于 n 的假定, 当 $k \leq n-1$ 时, P 与 U 相同, 而在第 n 批 P 不同于 U 。于是条件 (33) 满足, 而且

$$\alpha_n \neq \left[\frac{i+2}{2} \right] \alpha_{n+1} + \left[\frac{i+1}{2} \right] \beta_{n+1},$$

即

$$\alpha_n \in \{ \alpha_{n+1}, \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}, \dots, \left[\frac{i+1}{2} \right] \alpha_{n+1} + \left[\frac{i}{2} \right] \beta_{n+1} \} \cup$$

$$\cup \left\{ \left[\frac{i+3}{2} \right] \alpha_{n+1} + \left[\frac{i+2}{2} \right] \beta_{n+1}, \dots, (i+1) \alpha_{n+1} + i \beta_{n+1} \right\}.$$

因而由引理 7 ~ 引理 10,

$$\delta(P) \geq \delta^{(n+1)}(P) > \delta(U),$$

(44) 也真。证明遂告完成。

应用完全同样的方法, 可以证明

定理 2. 在一切每批 $2i$ ($i \geq 2$) 个试点的基本策略中, U 是不超过 n 批试验条件下的最优策略。

对于 $i = 1$ 的情况, 特殊了一些。容易证明

定理 3. 在一切每批 2 个试点的基本策略中, U 是不超过三批试验条件下的最优策略。

现在, 我们定义试验策略 U' , 它是每批 2 个试点的试验策略: 第一批试点取为 $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$; 从第二批开始, 都将剩余区间四等分, 在两个未试验过的等分点上安排新的一批试验。此时, U 的精度为 $4/3$, U' 的精度为 $9/7$ (在第一步达到)

定理 4. 在一切每批 2 个试点的基本的基本策略中, U' 是最优的。

从定理 3 和定理 4 可以看出, 即使对于 $i = 1$ 的情况, U 仍然是有意义的。因为它与 U' 差别不大。

自然会提出这样一个问题: 能否对任何试验策略来证明 U 的最优性呢? 我们可以构造一个试验策略 (不是基本策略), 它比 U' 更好些。因此, 这个猜测是不对的。但如同前面所说的, 那些构造繁杂的试验策略, 在实际应用中并没有多大价值。

有时, 人们用基本策略所能处理的等分数来比较策略的优劣。即所处理的等分数愈

多者愈好。在这里， $E_n^{(i)}$ 所能处理的最多等分数是 $E'_n = 2(i+1)^n - 1$ ；而 U 所能处理的最多等分数是 $(2i+1)(i+1)^{n-1}$ 。当 $n \rightarrow \infty$ 时，两者之差为 $((i+1)^n - 1) \uparrow \infty$ 。即用 $E_n^{(i)}$ 所能处理的等分数比之用 U 多得多。这似乎意味着，随着 n 的增大，相对于 $E_n^{(i)}$ 而言， U 就越不好。然而，这只是一种误解。实际上，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n(E)}{\delta(U)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2i+1)(i+1)^{n-1}}{2(i+1)^n - 1} = \frac{2i+1}{2i+2}.$$

换句话说， $E_n^{(i)}$ 和 U 的精度是属同一数量级的，相差不大。更为重要的是，如果顾及到试验的可分辨性，则 U 比 $E_n^{(i)}$ 有更大的优越性。

志 謝： 本文写作中承北京师大严士健老师、王世强老师和长沙铁道学院侯振挺老师的指导和鼓励，我院数学系的许多同志也给予热情的支持和帮助，在此衷心感谢！

参 考 文 献

- [1]. 华 罗 庚. 《优选法平话及其补充》. 国防工业出版社. 1970年5月.
- [2]. 洪 加 威. 论批数不限定情况下一维优选问题的最优策略. 《中国科学》. 2. (1974).

第二文定理 1 证明的补充

陈木法

(北师大数学学院)

(1990年)

依照最优策略 $\mathcal{U}$ 的构造, 它的 $2i$ 个试点连同上批试验后留下的好点将剩余区间分成 $2i + 1$ 个等分. 这意味着

- (A) 在第 $n + 1$ 步, 包含第 n 批留下的已试点在内的 $2i + 1$ 个试点中, 已试点处于排序的中间位置, 即为第 $i + 1$ 个试点, 满足

$$\alpha_n = \left\lfloor \frac{i+2}{2} \right\rfloor \alpha_{n+1} + \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor \beta_{n+1}. \quad (*)$$

同时,

- (B) 已试点位于剩余区间的中心.

原证中仅考虑了不满足 $(*)$ 的策略 $\mathcal{P}$ 而忽视了满足 $(*)$ ($\forall n \geq 1$) 但不满足 (B) 的策略. 这里予以补证.

(1) 首先注意, 当 i 为奇数时, 条件 (A) 对一切 $n \geq 1$ 成立推出条件 (B). 例如设 $i = 2j - 1$. 那么上批留下的好点连同这批的 $2i$ 个试点将区间分成长、短相间的 $4j$ 段, 上批的好点排序居中, 它的两边各有 $2j$ 段(长、短段各半), 故好点必定处于试验区间的中点.

由此可以看出: 当 $i = 2j$ 为偶数时, 满足 $(*)$ ($\forall n \geq 1$) 的策略未必满足 (B). 因为此时好点两边各有 $2j + 1$ 段, 例如说左方多出一长的, 则右方就多出一短的, 因而好点两边的长度不相等, 当然好点就不处于剩余区间的中点.

(2) 今设 $i = 2j$, 策略 $\mathcal{P} \neq \mathcal{U}$ 且 $(*)$ 对一切 $n \geq 1$ 成立. 若 $\alpha_1 = \beta_1$, 则由 $(*)$ 将可推出 $\alpha_n = \beta_n$ 对一切 $n \geq 1$ 成立而与 $\mathcal{P} \neq \mathcal{U}$ 矛盾. 先设 $\alpha_1 > \beta_1$. 则 $\delta_1 = \max\{\alpha_1, \beta_1\} = \alpha_1$. 由 $i = 2j$ 及 $(*)$ 知, 此

时必定有 $\alpha_2 > \beta_2$. 因而 $\delta_2 = \alpha_2$. 重复此项手续得出 $\delta_n = \alpha_n$, $n \geq 1$. 由此及 (*) 得

$$\delta_n = (j+1)\delta_{n+1} + j\beta_{n+1} = \delta_{n+1} + j\Delta_{n+1}.$$

应用文中的 (18) 式于 $\Delta_n = \alpha_n + \beta_n$, 得出

$$\Delta_n = (i+1)\Delta_{n+1} = (2j+1)\Delta_{n+1}.$$

综合以上两式, 得到

$$\begin{pmatrix} \delta_n \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 2j+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{n+1} \\ \Delta_{n+1} \end{pmatrix}. \quad n \geq 1.$$

这样,

$$\begin{pmatrix} \delta_{n+1} \\ \Delta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 2j+1 \end{pmatrix}^{-n} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \Delta_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \frac{1-\delta_1}{2j}.$$

由于

$$\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 2j+1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -j(2j+1)^{-1} \\ 0 & (2j+1)^{-1} \end{pmatrix},$$

我们有

$$\begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 2j+1 \end{pmatrix}^{-n} = \begin{pmatrix} 1 & (-j)^n(2j+1)^{-n} \\ 0 & (2j+1)^{-n} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} \delta_{n+1} \\ \Delta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-j)^n(2j+1)^{-n} \\ 0 & (2j+1)^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ (1-\delta_1)/(2j) \end{pmatrix}.$$

由此解出

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= \delta_1 + \frac{(-j)^n}{(2j+1)^n} \frac{1-\delta_1}{2j} \\ &= \left[1 - \frac{(-j)^n}{2j(2j+1)^n} \right] \delta_1 + \frac{(-j)^n}{2j(2j+1)^n}. \end{aligned}$$

此式也适用于 $\mathcal{U}$. 于是

$$\delta_{n+1}(\mathcal{P}) - \delta_{n+1}(\mathcal{U}) = \left[1 - \frac{(-j)^n}{2j(2j+1)^n} \right] (\delta_1(\mathcal{P}) - \delta_1(\mathcal{U})).$$

这样, 由假设 $\delta_1(\mathcal{P}) > \delta_1(\mathcal{U})$ 得到

$$E_{n+1}(\delta_{n+1}(\mathcal{P}) - \delta_{n+1}(\mathcal{U})) > \frac{5}{6}E_{n+1}(\delta_1(\mathcal{P}) - \delta_1(\mathcal{U})) \rightarrow \infty \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

(3) 当 $\alpha_1 < \beta_1$ 时, 证明类似. 首先有 $\alpha_n < \beta_n$, $n \geq 1$. 其次使用 (*) 得出递推关系

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \Delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 2j+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \Delta_{n+1} \end{pmatrix}. \quad n \geq 1.$$

从而

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \Delta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (-j)^n(2j+1)^{-n} \\ 0 & (2j+1)^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ (1-\alpha_1)/(2j) \end{pmatrix}.$$

由此解出

$$\alpha_{n+1} = \alpha_1 + \frac{(-j)^n}{2j(2j+1)^n}(1-\alpha_1)$$

$$\Delta_{n+1} = \frac{1-\alpha_1}{2j(2j+1)^n}.$$

这样

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= \beta_{n+1} \\ &= \Delta_{n+1} - \alpha_{n+1} \\ &= \frac{1-\alpha_1}{2j(2j+1)^n}(1-(-j)^n) - \alpha_1 \\ &= \frac{1-(-j)^n}{2j(2j+1)^n} - \left[1 + \frac{1-(-j)^n}{2j(2j+1)^n}\right]\alpha_1. \end{aligned}$$

由假设知 $\alpha_1(\mathcal{P}) < \alpha_1(\mathcal{U})$, 故同样有

$$E_{n+1}(\delta_{n+1}(\mathcal{P}) - \delta_{n+1}(\mathcal{U})) > \frac{5}{6}E_{n+1}(\alpha_1(\mathcal{U}) - \alpha_1(\mathcal{P})) \rightarrow \infty \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.$$

证毕.